PROYECTO MATEMÁTICO

"UN TRIÁNGULO CON MÁS DE TRES ÁNGULOS"

Turno: Noviembre 2009

A3

Introducción

“Un triángulo con más de tres ángulos”

Para mi proyecto me propuse investigar qué ocurre al trazar las medianas en un triángulo cualquiera abc. Es decir, cómo resultan las áreas de los seis triángulos que quedan determinados en el interior del abc.

Para ello, primero partiré de un caso particular. Tomaré tres vértices "a", "b" y "c" determinados, elegidos en forma conveniente a mi trabajo, ya que necesito averiguar:

1- Distancia entre los puntos a, b y c para hallar las longitudes de cada uno de los lados del abc.

2- Coordenadas de los puntos medios de cada lado.

3- Medida de cada una de las medianas.

4- Ángulos interiores de los triángulos que determinan las medianas y los lados del abc.

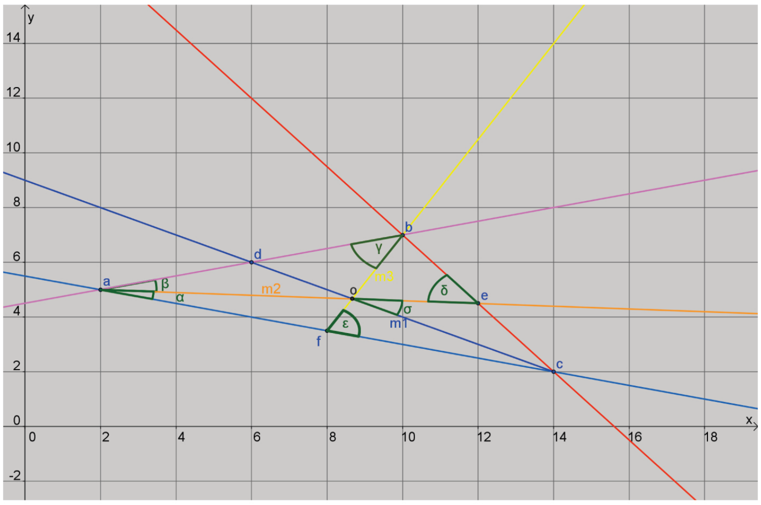
5- Áreas de los triángulos interiores.

Para desarrollar este plan de trabajo, utilizaré conocimientos sobre geometría analítica y trigonometría.

La pregunta que intentaré responder a lo largo de este estudio será: "Las áreas de los seis triángulos determinados por las medianas de un triángulo cualquiera, ¿son iguales?”

1

Desarrollo



a=(2;5)
b=(10;7)
c=(14;2)

Cálculo de los puntos medios de los lados

En este triángulo abc, cada lado esta cortado por su mediana en sus puntos medios. Hay veces que en un eje se puede ver a simple vista el punto medio pero hay veces que no. Para éstos cálculos, utilizaré la fórmula siguiente para el x de cada coordenada:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=x$$

Y para el y de cada coordenada:

$$\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)=y$$

Punto medio de $\overline{ab}$

$$d_x\left(\frac{10+2}{2}\right)=6$$

$$d_y\left(\frac{7+5}{2}\right)=6$$

d= (6;6)

2

B2

Punto medio de $\overline{bc}$

$$e_x(\frac{10+14}{2})=12$$

$$e_y(\frac{7+2}{2})=4,5$$

e= (12;4,5)

Punto medio de $\overline{ca}$

$$f_x(\frac{14+2}{2})=8$$

$$f_y(\frac{5+2}{2})=3,5$$

f=(8;3,5)

Longitud de los lados

Fórmula de distancia entre dos puntos: $D_{ab}=+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
Aplicaré la fórmula de la distancia entre dos puntos: siendo a = (2;5) y b= (10;7)

Resulta:

$$\overline{ab}=+\sqrt{(2-10)^2+(5-7)^2}$$
$$\overline{ab}=+\sqrt{64+4}$$
$$\overline{ab}=+\sqrt{68}$$
$$\overline{ab}=+2\sqrt{17}$$

Siendo b= (10;7) y c=(14;2)
Resulta:

$$\overline{bc}=+\sqrt{(10-14)^2+(7-2)^2}$$
$$\overline{bc}=+\sqrt{16+25}$$
$$\overline{bc}=+\sqrt{41}$$

Siendo a=(2;5) y c=(14;2)
Resulta:

$$\overline{ac}=+\sqrt{(2-14)^2+(2-5)^2}$$

3

B2

$\overline{ac} = +\sqrt{144+9}$
$\overline{ac} = +\sqrt{153}$
$\overline{ac} = +3\sqrt{17}$

Ya que los lados están divididos en parte iguales por la mediana, calcularemos cada mitad de los tres lados del triángulo.

$\frac{\overline{ab}}{2} = \overline{ad} / \overline{db}$
$\frac{2\sqrt{17}}{2} = \overline{ad} / \overline{db}$
$\sqrt{17} = \overline{ad}$
$\sqrt{17} = \overline{db}$

$\frac{\overline{bc}}{2} = \overline{be} / \overline{ec}$
$\frac{1}{2}\sqrt{41} = \overline{be}$
$\frac{1}{2}\sqrt{41} = \overline{ec}$

$\frac{\overline{ca}}{2} = \overline{af} / \overline{fc}$
$\frac{3\sqrt{17}}{2} = \overline{af}$
$\frac{3\sqrt{17}}{2} = \overline{fc}$

Para tener las medidas de los lados de los triángulos interiores y poder calcular sus áreas, deberemos obtener las medidas de las medianas utilizando la misma fórmula de distancia entre dos puntos.

Siendo f=(8;3,5) y b=(10;7) $\overline{ao} = \frac{2}{3}\sqrt{100,25}$

$\overline{fb} = \sqrt{(10-8)^2 + (7-3,5)^2}$
$\overline{fb} = \sqrt{4+12,25}$
$\overline{fb} = \sqrt{16,25}$

Siendo d=(6;6) y c=(14;2)

$\overline{dc} = \sqrt{(14-6)^2 + (2-6)^2}$
$\overline{dc} = \sqrt{64+16}$
$\overline{dc} = \sqrt{80}$

Siendo a=(2;5) y e=(12;4,5)

$\overline{ae} = +\sqrt{(12-2)^2 + (4,5-5)^2}$
$\overline{ae} = +\sqrt{100+0,25}$
$\overline{ae} = +\sqrt{100,25}$

El punto o es el baricentro, es decir, el punto de intersección de las medianas del triángulo abc. El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos, el segmento que une el baricentro con el vértice mide el doble que el segmento que une el baricentro con el punto medio del lado opuesto.

4

Ejemplo: $\overline{ab} = 2.\overline{of}$

También podemos decir que el segmento más largo es dos tercios de la mediana. Por eso podemos calcular estos segmentos que representan otros lados de los triángulos interiores.

* $\overline{ao} = \frac{2}{3}\overline{ae}$ * $\overline{oe} = \frac{1}{3}\overline{ae}$ * $\overline{do} = \frac{1}{3}\overline{dc}$ * $\overline{oc} = \frac{2}{3}\overline{dc}$

$\overline{ao} = \frac{2}{3}\sqrt{100,25}$ $\overline{oe} = \frac{1}{3}\sqrt{100,25}$ $\overline{do} = \frac{1}{3}\sqrt{80}$ $\overline{oc} = \frac{2}{3}\sqrt{80}$

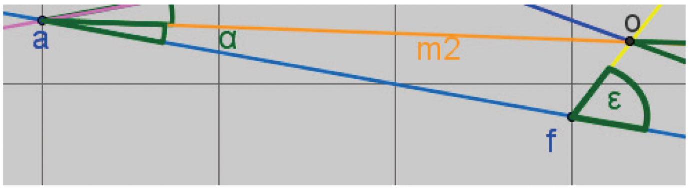
* $\overline{bo} = \frac{2}{3}\overline{bf}$ * $\overline{of} = \frac{1}{3}\overline{bf}$

$\overline{bo} = \frac{2}{3}\sqrt{16,25}$ $\overline{of} = \frac{1}{3}\sqrt{16,25}$

Teniendo las medidas de todos los segmentos que componen los lados de todos los triángulos, podemos aplicar el Teorema del Coseno para averiguar un ángulo de cada uno y luego obtener las áreas correspondientes. Estos ángulos serán expresados en tres cifras significativas.

<u>Teorema del coseno:</u> $\overline{A}^2 = \overline{B}^2 + \overline{C}^2 - 2.\overline{B}.\overline{C}.\cos\hat{\alpha}$

Calcularé ahora el ángulo α comprendido entre los lados ao y af.



$$\overline{of}^2 = \overline{ao}^2 + \overline{af}^2 - 2.\overline{ao}.\overline{af}.\cos\hat{\alpha}$$

$$(\frac{1}{3}\sqrt{16,25})^2 = (\frac{2}{3}\sqrt{100,25})^2 + (\frac{3}{2}\sqrt{17})^2 - 2.\frac{2}{3}.\sqrt{100,25}.\frac{3}{2}\sqrt{17}.\cos\hat{\alpha}$$

$$\frac{1}{9}.16,25 = \frac{4}{9}.100,25 + \frac{9}{4}.17 - 2.\sqrt{1704,25}.\cos\hat{\alpha}$$

5

$$\frac{16,25}{9}=\frac{401}{9}+38,25-2.\sqrt{1704.25}.\cos\hat{\alpha}$$

$$\frac{16,25}{9}-\frac{401}{9}=38,25-2.\sqrt{1704.25}.\cos\hat{\alpha}$$

$$-42,75-38,25=-2.\sqrt{1704.25}.\cos\hat{\alpha}$$

$$-81=-2.\sqrt{1704,25}.\cos\hat{\alpha}$$

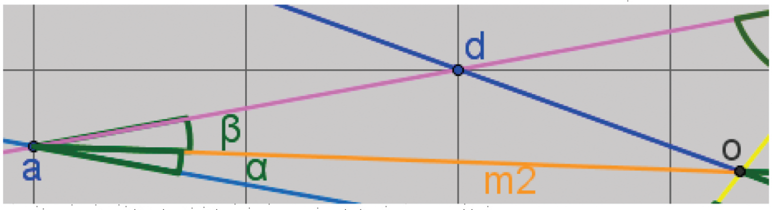
$$\frac{-81}{-2.\sqrt{1704.25}}=\cos\hat{\alpha}$$

$$0.9810437422=\cos\hat{\alpha}$$

$$\hat{\alpha}=11,17383824°$$

$$\hat{\alpha}=11,2°$$

Calcularé ahora el ángulo β comprendido entre los lados ad y ao.



$$\overline{do}^2=\overline{ad}^2+\overline{ao}^2-2.\overline{ad}.\overline{ao}.\cos\hat{\beta}$$

$$(\frac{1}{3}\sqrt{80})^2=\sqrt{17}^2+(\frac{2}{3}\sqrt{100,25})^2-2.\sqrt{17}.\frac{2}{3}\sqrt{100,25}.\cos\hat{\beta}$$

$$\frac{1}{9}.80=17+\frac{4}{9}.100,25-\frac{4}{3}\sqrt{1704,25}.\cos\hat{\beta}$$

$$\frac{80}{9}=17+\frac{401}{9}-\frac{4}{3}\sqrt{1704,25}.\cos\hat{\beta}$$

$$\frac{80}{9}-\frac{401}{9}=17-\frac{4}{3}\sqrt{1704,25}.\cos\hat{\beta}$$

$$-\frac{321}{9}-17=-\frac{4}{3}\sqrt{1704,25}.\cos\hat{\beta}$$

6

$$-\frac{474}{9} = -\frac{4}{3}\sqrt{1704,25}.\cos\hat{\beta}$$

$$-\frac{474}{9}.\left(-\frac{3}{4}\right) = \sqrt{1704,25}.\cos\hat{\beta}$$

$$\frac{79}{2} = \sqrt{1704,25}.\cos\hat{\beta}$$

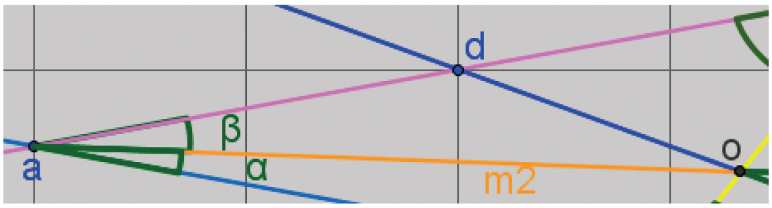
$$\frac{\frac{79}{2}}{\sqrt{1704,25}} = \cos\hat{\beta}$$

$$0,9568204399 = \cos\hat{\beta}$$

$$\hat{\beta} = 16,8986487^{o}$$

$$\hat{\beta} = 16,9^{o}$$

Calcularé ahora el ángulo γ comprendido entre los lados db y bo.



$$\overline{do}^2 = \overline{db}^2 + \overline{bo}^2 - 2.\overline{db}.\overline{bo}.\cos\hat{\gamma}$$

$$(\frac{1}{3}\sqrt{80})^2 = (\sqrt{17})^2 + (\frac{2}{3}\sqrt{16,25})^2 - 2.\sqrt{17}.\frac{2}{3}\sqrt{16,25}.\cos\hat{\gamma}$$

$$\frac{1}{9}80 = 17 + \frac{4}{9}16,25 - \frac{4}{3}\sqrt{276,25}.\cos\hat{\gamma}$$

$$\frac{80}{9} = 17 + \frac{65}{9} - \frac{4}{3}\sqrt{276,25}.\cos\hat{\gamma}$$

$$\frac{80}{9} - \frac{65}{9} = 17 - \frac{4}{3}\sqrt{276,25}.\cos\hat{\gamma}$$

$$\frac{5}{3}-17=-\frac{4}{3}\sqrt{276,25}.\cos\hat{\gamma}$$

$$-\frac{46}{3}.\left(-\frac{3}{4}\right)=\sqrt{276,25}.\cos\hat{\gamma}$$

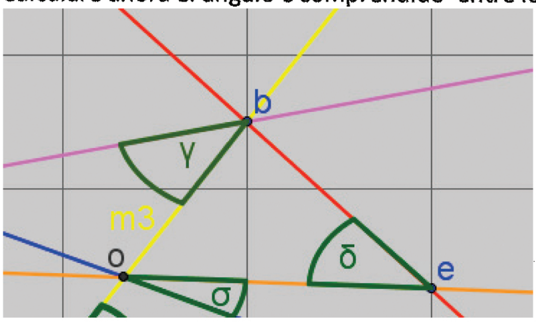
$$\frac{\frac{23}{2}}{\sqrt{276,25}}=\cos\hat{\gamma}$$

$$0,6919053632=\cos\hat{\gamma}$$

$$\hat{\gamma}=46,21887524°$$

$$\hat{\gamma}=46,2°$$

Calcularé ahora el ángulo δ comprendido entre los lados be y oe.



$$\overline{ob}^2=\overline{be}^2+\overline{oe}^2-2.\overline{be}.\overline{oe}.\cos\hat{\delta}$$

$$\hat{\varepsilon}=74,3°\left(\frac{2}{3}\sqrt{16,25}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{41}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\sqrt{100,25}\right)^2-2.\frac{1}{2}\sqrt{41}.\frac{1}{3}\sqrt{100,25}.\cos\hat{\delta}$$

$$\frac{4}{9}.16,25=\frac{1}{4}.41+\frac{1}{9}.100,25-\frac{1}{3}\sqrt{4110,25}.\cos\hat{\delta}$$

$$\frac{65}{9}=\frac{41}{4}+\frac{100,25}{9}-\frac{1}{3}\sqrt{4110,25}.\cos\hat{\delta}$$

$$\frac{65}{9}-\frac{100,25}{9}=\frac{41}{4}-\frac{1}{3}\sqrt{4110,25}.\cos\hat{\delta}$$

$$-\frac{35,25}{9}-\frac{41}{4}=-\frac{1}{3}\sqrt{4110,25}.\cos\hat{\delta}$$

8

$$-\frac{85}{6}=-\frac{1}{3}\sqrt{4110,25}.\cos\hat{\delta}$$

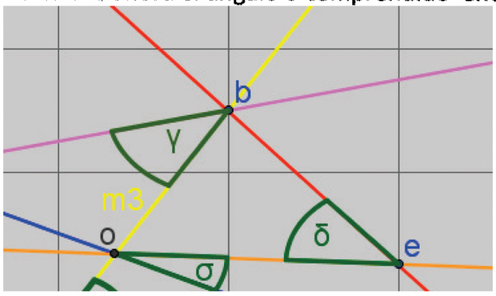
$$\frac{-\frac{85}{6}}{-\frac{1}{3}\sqrt{4110,25}}=\cos\hat{\delta}$$

$$0,6625103673=\cos\hat{\delta}$$

$$\hat{\delta}=48,50839014°$$

$$\hat{\delta}=48,5°$$

Calcularé ahora el ángulo θ comprendido entre los lados oe y oc.



$$\overline{ec}^2=\overline{oe}^2+\overline{oc}^2-2.\overline{oe}.\overline{oc}.\cos\hat{\delta}$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{41}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\sqrt{100,25}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{80}\right)^2-2.\frac{1}{3}\sqrt{100,25}.\frac{2}{3}\sqrt{80}.\cos\hat{\theta}$$

$$\frac{1}{4}.41=\frac{1}{9}.100,25+\frac{4}{9}.80-\frac{4}{9}\sqrt{8020}.\cos\hat{\theta}$$

$$\frac{41}{4}=\frac{100,25}{9}+\frac{320}{9}-\frac{4}{9}\sqrt{8020}.\cos\hat{\theta}$$

$$\frac{41}{4}-\frac{420,25}{36}=-\frac{4}{9}\sqrt{8020}.\cos\hat{\theta}$$

$$\frac{-\frac{328}{9}}{-\frac{4}{9}\sqrt{8020}}=\cos\hat{\theta}$$

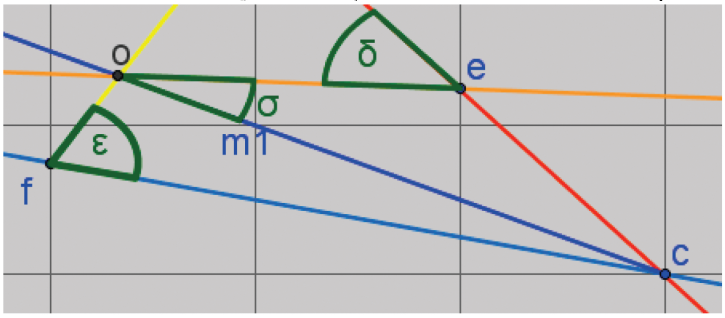
$$0,9156440302=\cos\hat{\theta}$$

9

$\hat{\theta} = 23,70264595^{\circ}$

$\hat{\theta} = 23,7^{\circ}$

Calcularé ahora el ángulo ε comprendido entre los lados fo y fc.



$\overline{oc}^2 = \overline{fo}^2 + \overline{fc}^2 - 2.\overline{fo}.\overline{fc}.\cos\hat{\varepsilon}$

$\left(\frac{2}{3}\sqrt{80}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\sqrt{16,25}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{17}\right)^2 - 2.\frac{1}{3}\sqrt{16,25}.\frac{3}{2}\sqrt{17}.\cos\hat{\varepsilon}$

$\frac{4}{9}.80 = \frac{1}{9}.16,25 + \frac{9}{4}.17 - \sqrt{276,25}.\cos\hat{\varepsilon}$

$\frac{320}{9} - \frac{16,25}{9} = \frac{153}{4} - \sqrt{276,25}.\cos\hat{\varepsilon}$

$\frac{303,75}{9} - \frac{153}{4} = -\sqrt{276,25}.\cos\hat{\varepsilon}$

$\frac{-\frac{162}{36}}{-\sqrt{276,25}} = \cos\hat{\varepsilon}$

$0,2707455769 = \cos\hat{\varepsilon}$

$\hat{\varepsilon} = 74,29136217^{\circ}$

$\hat{\varepsilon} = 74,3^{\circ}$

10

Áreas de los triángulos

Para las áreas de los seis triángulos usaré la siguiente fórmula:

$$\acute{A}\ \overset{\triangle}{abc} = \frac{\overline{a}.\overline{b}.sen\hat{\alpha}}{2}$$

Los siguientes resultados serán expresados con tres cifras significativas.

Área del triángulo aof:

$$\acute{A}\ \overset{\triangle}{aof} = \frac{\frac{2}{3}.\sqrt{100,25}.\frac{3}{2}.\sqrt{17}.sen\hat{\alpha}}{2}$$

$$\acute{A}\ \overset{\triangle}{aof} = \frac{\frac{2}{3}.\sqrt{100,25}.\frac{3}{2}.\sqrt{17}.sen11,2°}{2}$$

$$\acute{A}\ \overset{\triangle}{aof} = \frac{\sqrt{1704,25}.sen11,2°}{2}$$

$$\acute{A}\ \overset{\triangle}{aof} = 4,01$$

Área del triángulo aod:

$$\acute{A}\ \overset{\triangle}{aod} = \frac{\frac{2}{3}.\sqrt{100,25}.\sqrt{17}.sen\hat{\beta}}{2}$$

$$\acute{A}\ \overset{\triangle}{aod} = \frac{\frac{2}{3}.\sqrt{1704,25}.sen16,9°}{2}$$

$$\acute{A}\ \overset{\triangle}{aod} = 4,00$$

Área del triángulo dob:

$$\acute{A}\ \overset{\triangle}{dob} = \frac{\frac{2}{3}.\sqrt{16,25}.\sqrt{17}.sen\hat{\gamma}}{2}$$

11

$$\acute{A}dob=\frac{\frac{2}{3}.\sqrt{276,25}.sen46,2°}{2}$$

$$\acute{A}dob=4,00$$

Área el triángulo obe:

$$\acute{A}obe=\frac{\frac{1}{2}.\sqrt{41}.\frac{1}{3}.\sqrt{100,25}.sen\hat{\delta}}{2}$$

$$\acute{A}obe=\frac{\frac{1}{6}.\sqrt{4110,25}.sen48,5°}{2}$$

$$\acute{A}obe=4,00$$

Área del triángulo oec:

$$\acute{A}oec=\frac{\frac{1}{3}.\sqrt{100,25}.\frac{2}{3}.\sqrt{80}.sen\hat{\theta}}{2}$$

$$\acute{A}oec=\frac{\frac{2}{9}.\sqrt{8020}.sen23,7°}{2}$$

$$\acute{A}oec=4,00$$

Área del triángulo foc:

$$\acute{A}foc=\frac{\frac{1}{3}.\sqrt{16,25}.\frac{3}{2}.\sqrt{17}.sen\hat{\varepsilon}}{2}$$

$$\acute{A}foc=\frac{\frac{1}{2}.\sqrt{276,25}.sen74,3°}{2}$$

$$\acute{A}foc=4,00$$

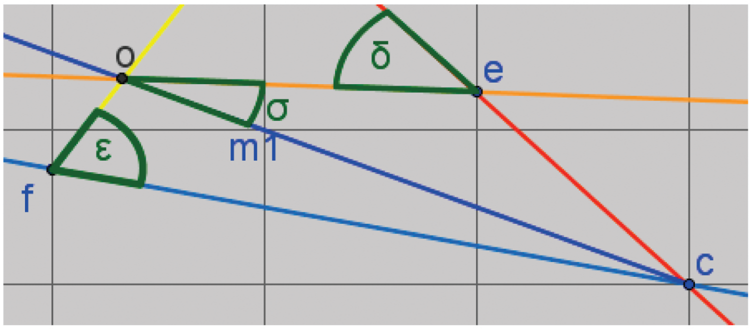
Como vemos que los valores se aproximan a 4, voy a demostrar que las áreas de los triángulos son iguales.

12

D3

Generalización del procedimiento

Este proceso matemático se puede utilizar para calcular el área de cualquier triángulo representado en un sistema de ejes cartesianos. Para eso, haré las equivalencias entre las áreas de los triángulos para ver a qué conclusión se puede llegar.



C4

Por ejemplo, si tomamos el área del triángulo aof y la del triángulo foc observamos lo siguiente:

Consideramos que:

$\acute{A}aof = \acute{A}foc$ pues tiene igual base e igual altura.

$$\frac{\overline{af}.\overline{fo}.sen\hat{\alpha}}{2} = \frac{\overline{fc}.\overline{fo}.sen\hat{\varepsilon}}{2}$$

También $\overline{af} = \overline{fc}$

$$\frac{\overline{af}.\overline{fo}.sen(180° - \hat{\varepsilon})}{2}.2 = \overline{fc}.\overline{fo}.sen\hat{\varepsilon}$$

$$\frac{\overline{af}.\overline{fo}.sen(180° - \hat{\varepsilon})}{\overline{fc}.\overline{fo}} = sen\hat{\varepsilon}$$

13

C4

Por lo tanto resulta que:

$sen(180° - \hat{\varepsilon}) = sen\hat{\varepsilon}$

por la propiedad de los ángulos suplementarios.

Del mismo modo, si consideramos que:

$Áado \cong Ábod$

$\frac{\overline{ad}.\overline{do}.sen\hat{1}}{2} = \frac{\overline{db}.\overline{do}.sen\hat{2}}{2}$

También $\overline{ad} = \overline{db}$

$\frac{\overline{ad}.\overline{do}.sen(180° - \hat{1})}{2}.2 = \overline{db}.\overline{do}.sen\hat{2}$

$\frac{\overline{ad}.\overline{do}.sen(180° - \hat{1})}{\overline{db}.\overline{do}} = sen\hat{2}$

Por lo tanto resulta que:

$sen(180° - \hat{1}) = sen\hat{2}$

es correcto ya que $\hat{1} + \hat{2} = 180°$ por la propiedad de los ángulos suplementarios.

Una vez más, consideramos que:

$Áobe \cong Áoec$

$\frac{\overline{be}.\overline{oe}.sen\hat{\delta}}{2} = \frac{\overline{oe}.\overline{ec}.sen(180° - \hat{\delta})}{2}$

También $\overline{be} = \overline{ce}$

$\frac{\overline{be}.\overline{oe}.sen\hat{\delta}}{2}.2 = \overline{oe}.\overline{ec}.sen(180° - \hat{\delta})$

14

C4

$$\frac{\overline{be}.\overline{oe}.sen\hat{\delta}}{\overline{oe}.\overline{ec}} = sen(180° - \hat{\delta})$$

Por lo tantao resulta que:

$$sen\hat{\delta} = sen(180° - \hat{\delta})$$

ya que se cumple la propiedad de los ángulos suplementarios.

Conclusión

Durante este proyecto lo que me pareció difícil fue el hecho de organizar el trabajo y seguir con el siguiente paso cada vez que calculaba algún dato para llegar a una respuesta concreta, el área de los triángulos.

E1

Para mejorar este trabajo podría haber incluido otro método para calcular las áreas como el de hacer la diferencia entre los triángulos abf o bcf y uno de sus tres triángulos internos.

Por ejemplo, como:

$$\acute{A}afb = \acute{A}bfc$$

Y además:

$$\acute{A}aof = \acute{A}cof$$

Si restamos el miembro menor al mayor:

$$\acute{A}afb - \acute{A}aof = \acute{A}aob$$

Y también:

$$\acute{A}bfc - \acute{A}cof = \acute{A}boc$$

Además, el $\acute{A}aob = \acute{A}aod + \acute{A}bod$. Anteriormente demostramos que ambas áreas eran iguales, entonces:

15

$\acute{A}aob = 2.\acute{A}aod$

De esta manera, por diferencias, se puede deducir (habiendo calculado previamente las áreas de los dos triángulos abf y bcf), las áreas de los seis triángulos.

E1

En conclusión, podemos decir que a través de la aplicación de teorema del coseno y la fórmula de las áreas para cualquier triángulo, las áreas que se forman a partir del trazo de las tres medianas, son iguales.

D3

16